平成 18 年度 卒業論文

2進数の平面的表現に関する考察

岩淵 勇樹

金沢大学 工学部 情報システム工学科

集積回路工学研究室

指導教員: 秋田 純一講師

目 次

第1章　序論

1.1　背景および目的

数を表すための記数法は、人間の生活においては 10 進法、情報分野においては 2 進法が最もよく用いられている。その他、フィボナッチ数の組み合わせによって自然数を表現するフィボナッチ記数法 [1] や、負数 (-2) および複素数 $(-1+i)$ を基数とした記数法など、数多く存在する [2]。その他、たとえば以下のような記数法が挙げられる。

- 位取り記数法（N 進法）[3]
- 平衡 3 進法
- 符号付き 2 進展開
- ϕ（黄金比）進法 [4]
- 階乗記数法 [5]
- Bijective numeration
- グレイコード

それらは数学的に興味深いだけでなく、数を離散的に表現しているため計算機上で理論を適用しやすく、効率的な情報処理を行うために有効である可能性が大きい。

今回提案する 2 進数の平面的表現（平面的 2 進数と呼ぶ）は、複数の基数を用いる点で上述の記数法とは全く異なるが、同じように演算器の改良や関数の離散的表現などに応用できる可能性があるため、その諸性質について研究する。

第2章　平面的2進数の原理

2.1　定義

平面的 2 進数とは、 $p+q=2$ という等式を満たす p,q を基数とした記数法であり、以下のように係数が 1 となるような p と q の多項式によって表現される。

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}p^i q^j \ (a_{ij} \in \{0,1\}) \tag{2.1}$$

そして、多項式の係数を並べ、以下のように表記する。

$$\begin{array}{cccccc|}
a_{nm} & \cdots & a_{im} & \cdots & a_{1m} & a_{0m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{nj} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1j} & a_{0j} \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{11} & a_{01} \\
a_{n0} & \cdots & a_{i0} & \cdots & a_{10} & a_{00} \\
\hline
\end{array}$$

平面的 2 進数であることを表すため、右と下に線を引いた表記法を用いることにする。なお、2 進数の表記に倣って並べているため、行列とは異なり a_{00} が右下にあることに注意されたい。

なお、次章以降で $\begin{array}{cc|} 2 & 1 \\ \hline \end{array}(=2p+1)$ のように a_{ij} が 2 以上であるような表記が用いられるが、それらは計算の過程を示すために便宜上用いられるものであり、平面的 2 進数ではない。

次節で示すとおり、非負整数は平面的 2 進数表現が一意に定まるが、それらによって決定される表記以外については未定義である（たとえば $\begin{array}{cc|} 1 & 1 \\ \hline \end{array}(=p+1)$ には具体的な数値を定義していない）。

2.2　自然数の平面的 2 進表記

$\lfloor x \rfloor$ を x を超えない最大の整数、 $(x \bmod y)$ を x を y で割った余りとする。

任意の整数 X について

$$X = 2\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor + (X \bmod 2) \tag{2.2}$$

が成立するため、$p+q=2$ という等式を用いると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
X &= (p+q)\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor + (X \bmod 2) \\
&= \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor p + \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor q + (X \bmod 2)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

この性質を用いて、任意の非負整数 A は以下のようにして平面的 2 進数表現を求められる。

自然数の平面的 2 進数表現を求めるアルゴリズム

1. $k=0$ とおく。
2. $p^i q^{k-i}$ の各項（ k **段目**の項と呼ぶ）について、係数が 1 以下ならば a_{ik-i} はその値に確定。
3. k 段目の項について、係数が 2 以上の項があれば、式 (2.3) を適用する。なければ終了。
4. $k=k+1$ とおき、2. 以降を実行する。

具体的に、 $A=10$ について例を示す。

$$\begin{array}{c|}\mathbf{10}\\ \hline\end{array} = \begin{array}{cc|}0&5\\ \mathbf{5}&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{ccc|}0&2&\mathbf{5}\\ 2&1&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{ccc|}0&0&2\\ 0&4&1\\ \mathbf{2}&1&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{cccc|}0&0&0&2\\ 0&1&\mathbf{4}&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{cccc|}0&0&2&\mathbf{2}\\ 0&3&0&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array}$$

$$= \begin{array}{cccc|}0&0&0&1\\ 0&0&3&0\\ 0&\mathbf{3}&0&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{cccc|}0&0&0&1\\ 0&1&\mathbf{3}&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{cccc|}0&0&1&1\\ 0&\mathbf{2}&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array} = \begin{array}{cccc|}0&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array}$$

このようにして 0 から 10 について平面的 2 進数表記を求めると、次のようになる。

$$0=\begin{array}{c|}0\\ \hline\end{array}\quad 1=\begin{array}{c|}1\\ \hline\end{array}\quad 2=\begin{array}{cc|}0&1\\ 1&0\\ \hline\end{array}\quad 3=\begin{array}{cc|}0&1\\ 1&1\\ \hline\end{array}\quad 4=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\ 1&0&0\\ 1&0&0\\ \hline\end{array}\quad 5=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\ 1&0&0\\ 1&0&1\\ \hline\end{array}$$

$$6=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ \hline\end{array}\quad 7=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&1\\ \hline\end{array}\quad 8=\begin{array}{cccc|}0&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ \hline\end{array}\quad 9=\begin{array}{cccc|}0&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 1&0&0&1\\ \hline\end{array}\quad 10=\begin{array}{cccc|}0&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ \hline\end{array}$$

なお、さらに大きい自然数の平面的 2 進数表現のリストを付録 A に掲載した。

2.3 平面的 2 進数上の演算

2.3.1 加算

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}p^i q^j \\ B &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_{ij}p^i q^j \end{aligned}$$

とおくと、加算結果は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
C &= A+B=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}a_{ij}p^iq^j+\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}b_{ij}p^iq^j &(2.4)\\
&= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(a_{ij}+b_{ij})p^iq^j &(2.5)
\end{aligned}
$$

しかし、このとき $a_{ij}+b_{ij}=2$ となるような項があった場合は、第 2.2 節で述べた方法のように、係数がすべて 1 以下になるように変形を繰り返す必要がある。

具体的に、$A=5=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\\hline\end{array}, B=3=\begin{array}{cc|}0&1\\1&1\\\hline\end{array}$ とおいたとき、それらの和 $A+B$ は以下のようにして求められる。

$$
\begin{aligned}
C &= A+B=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\\hline\end{array}+\begin{array}{cc|}0&1\\1&1\\\hline\end{array}\\
&= \begin{array}{ccc|}0&1&1\\1&0&1\\1&1&\mathbf{2}\\\hline\end{array}=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\1&0&2\\1&\mathbf{2}&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\1&1&\mathbf{2}\\2&0&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{ccc|}0&1&2\\1&2&0\\\mathbf{2}&0&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{cccc|}0&0&1&2\\0&2&\mathbf{2}&0\\1&0&0&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{cccc|}0&0&2&\mathbf{2}\\0&3&0&0\\1&0&0&0\\\hline\end{array}\\
&= \begin{array}{cccc|}0&0&0&1\\0&0&3&0\\0&\mathbf{3}&0&0\\1&0&0&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{cccc|}0&0&0&1\\0&1&\mathbf{3}&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{cccc|}0&0&1&1\\0&\mathbf{2}&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\\hline\end{array}=\begin{array}{cccc|}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\\hline\end{array}(=8)
\end{aligned}
$$

2.3.2　乗算

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{i_1=0}^{n_1}a_{i_1j_1}p^{i_1}q^{j_1}\\
B &= \sum_{j_2=0}^{m_2}\sum_{i_2=0}^{n_2}b_{i_2j_2}p^{i_2}q^{j_2}
\end{aligned}
$$

とおくと、乗算結果は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
C &= A\times B=\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{i_1=0}^{n_1}a_{i_1j_1}p^{i_1}q^{j_1}\times\sum_{j_2=0}^{m_2}\sum_{i_2=0}^{n_2}b_{i_2j_2}p^{i_2}q^{j_2} &(2.6)\\
&= \sum_{j_2=0}^{m_2}\sum_{i_2=0}^{n_2}\left\{\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{i_1=0}^{n_1}(a_{i_1j_1}b_{i_2j_2})p^{i_1+i_2}q^{j_1+j_2}\right\} &(2.7)
\end{aligned}
$$

しかし、このとき係数が 2 以上になるような項があった場合は、第 2.2 節で述べた方法のように、係数がすべて 1 以下になるように変形を繰り返す必要がある。

具体的に、$A=5=\begin{array}{ccc|}0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\\hline\end{array}, B=3=\begin{array}{cc|}0&1\\1&1\\\hline\end{array}$ とおいたとき、それらの積 $A\times B$ は以下のようにして求められる。

$$
\begin{aligned}
C &= A \times B = \begin{array}{ccc|} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
&= \begin{array}{ccc|} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \times 1 + \begin{array}{cccc|} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \times 1 + \begin{array}{ccc|} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \times 1 + \begin{array}{cccc|} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \times 0 \\
&= \begin{array}{cccc|} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{cccc|} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{cccc|} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{4} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccccc|} 0 & 0 & 2 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
&= \begin{array}{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccccc|} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccccc|} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} (= 15)
\end{aligned}
$$

第3章　平面的2進数の諸性質

平面的 2 進数は、2 進数のある一種の拡張であるが、その挙動は 2 進数と比較して非常に複雑である。本章では、そのいくつかの性質について述べる。

3.1　演算法則

A, B, C をそれぞれ平面的 2 進数とする。平面的 2 進数は、自然数と同じように加法と乗法について以下の法則を満たす。

- 単位元

$$A + \left.\underline{\;0\;}\right| = A \tag{3.1}$$

$$A \times \left.\underline{\;1\;}\right| = A \tag{3.2}$$

- 結合法則

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{3.3}$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \tag{3.4}$$

- 交換法則

$$A + B = B + A \tag{3.5}$$

$$A \times B = B \times A \tag{3.6}$$

- 分配法則

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \tag{3.7}$$

3.2　インクリメント

A, B を以下のような平面的 2 進数とする。

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} p^i q^j \ (a_{ij} \in \{0, 1\}) \\ B &= p^{i_0} q^{j_0} \end{aligned}$$

また、加算結果 $C = A + B$ は次のような表記とおく。

$$C = \sum_{j=0}^{m'} \sum_{i=0}^{n'} c_{ij} p^i q^j \ (c_{ij} \in \{0, 1\}) \tag{3.8}$$

このとき、 C は第 2.3 節で述べた加算法によって求めることができるが、以下に示す方法によって求めることもできる。

平面的 2 進数のインクリメント則

1. $C \leftarrow A$

2-1. $a_{i_0 j_0} = 0$ のとき、 $c_{i_0 j_0} \leftarrow 1$ として終了

2-2. $a_{i_0 j_0} = 1$ のとき、 $(i_1, j_1) \leftarrow (1, 0)$, $(i_2, j_2) \leftarrow (0, 1)$ として $(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$ となるまで以下の手順を繰り返す

3-1 $j_1 < j_2$ のとき

3-1-1 $a_{i_1 j_1} = 1$ のとき、 $c_{i_1 j_1} \leftarrow 0$, $i_1 \leftarrow i_1 + 1$

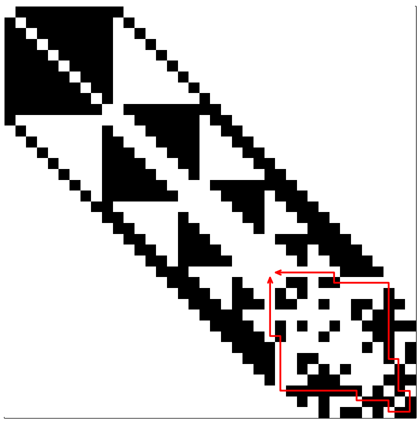
3-1-2 $a_{i_1 j_1} = 0$ のとき、 $c_{i_1 j_1} \leftarrow 1$, $j_1 \leftarrow j_1 + 1$

3-2 $i_2 < i_1$ のとき

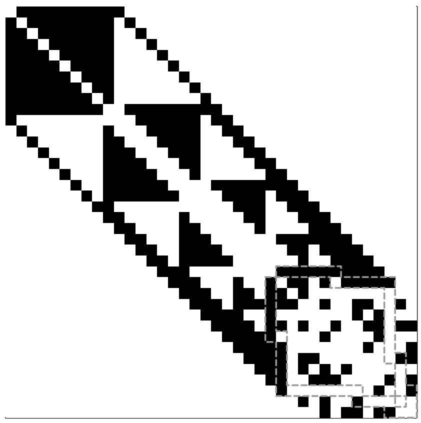
3-2-1 $a_{i_2 j_2} = 1$ のとき、 $c_{i_2 j_2} \leftarrow 0$, $j_2 \leftarrow j_2 + 1$

3-2-2 $a_{i_2 j_2} = 0$ のとき、 $c_{i_2 j_2} \leftarrow 1$, $i_2 \leftarrow i_2 + 1$

この変化を図 3.1 で説明すると、(a) にある矢印で示すように経路が双方向に分岐し、それぞれ色 (0,1) が変化したら方向転換し、交わるまでの経路（(b) の破線で囲まれた部分）にあるビットを反転させる、という単純なものである。



(a) 363



(b) 364

図 3.1: インクリメント時における変化ビットの経路

実際、自然数の平面的 2 進数表現においては図 3.2 に示すような変化が起こる。なお、ビット変化（差分）のリストを付録 B に掲載した。

3.3 デクリメント

前節における A, B について、減算 $A - B$ は以下に示す方法によって求めることができる。

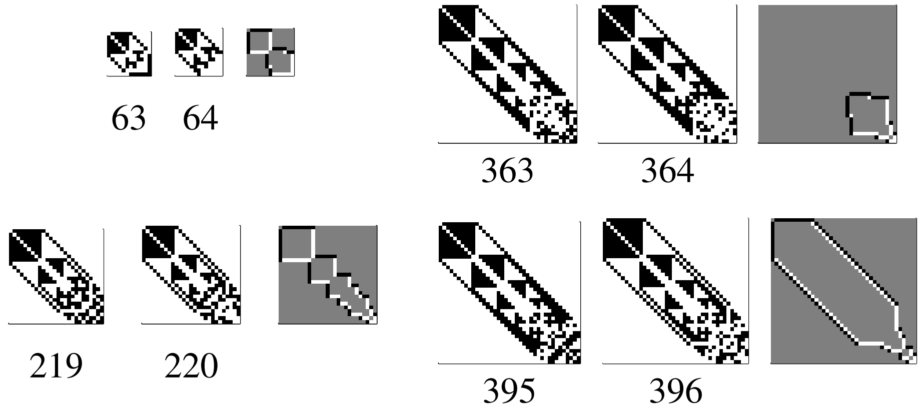


図 3.2: インクリメント時におけるビット変化（灰：変化なし、黒：$0 \to 1$、白：$1 \to 0$）

平面的 2 進数のデクリメント則

1. $C \leftarrow A$

2-1. $a_{i_0 j_0} = 1$ のとき、 $c_{i_0 j_0} \leftarrow 0$ として終了

2-2. $a_{i_0 j_0} = 0$ のとき、 $(i_1, j_1) \leftarrow (1, 0),\ (i_2, j_2) \leftarrow (0, 1)$ として $(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$ となるまで以下の手順を繰り返す

- 3-1 $j_1 < j_2$ のとき
  - 3-1-1 $a_{i_1 j_1} = 0$ のとき、 $c_{i_1 j_1} \leftarrow 1,\ i_1 \leftarrow i_1 + 1$
  - 3-1-2 $a_{i_1 j_1} = 1$ のとき、 $c_{i_1 j_1} \leftarrow 0,\ j_1 \leftarrow j_1 + 1$
- 3-2 $i_2 < i_1$ のとき
  - 3-2-1 $a_{i_2 j_2} = 0$ のとき、 $c_{i_2 j_2} \leftarrow 1,\ j_2 \leftarrow j_2 + 1$
  - 3-2-2 $a_{i_2 j_2} = 1$ のとき、 $c_{i_2 j_2} \leftarrow 0,\ i_2 \leftarrow i_2 + 1$

これは、 A の”1”と”0”を反転してから前節で示したインクリメント則を適用し、再び”1”と”0”を反転する操作に等しい。この法則を応用することによって、平面的 2 進数同士の減算を考えることが可能になる。

ただし、双方の経路が交わらない場合があり得るため、デクリメント結果が得られない場合がある。この問題は、第 4.1 節で示す整数への拡張を考えた場合には解消できる。

3.4 基数 p, q から読み取られる性質

第 2.1 節にて平面的 2 進数を定義したが、基数 p, q は $p + q = 2$ を満たすとしただけであった。ここで、基数に具体的な数値を与えることによって、自然数の平面的 2 進数表現についていくつかの性質を読み取ることができる。

まず、 $p = q = 1$ と置いたとき、式 (2.1) は以下のようになる。

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}1^i1^j = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij} \tag{3.9}$$

これより、自然数 A の平面的 2 進数表記における係数の総数は A と一致することがわかる。つまり、ある平面的 2 進数が自然数を表していることがわかっていれば、 1 の個数を数えれば数値を特定できる。

次に、 $p = 2, q = 0$ と置いたとき、式 (2.1) は以下のようになる。

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}2^i0^j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}2^i \tag{3.10}$$

これより、自然数 A の平面的 2 進数表記における第 0 行目は A の（通常の）2 進数表記になっていることがわかる[1]。つまり、ある平面的 2 進数が自然数を表していることがわかっていれば、第 0 行目だけを見て数値を特定できる。$p = 0, q = 2$ と置いたときも、行と列を入れ替えれば同様である。

3.5　2 のべき乗

二項定理より、

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \tag{3.11}$$

が成立する。これより、2 のべき乗は以下の例に示すように、二項係数を並べてから第 2.2 節の変形を行えばよい。なお、

$$\binom{n}{k} = {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

である。

$$\begin{aligned}
16 &= 2^4 = (p+q)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}p^kq^{n-k} = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4 \\
&= \begin{array}{ccccc|} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&4&0\\ 0&0&6&0&0\\ 0&\mathbf{4}&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{ccccc|} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&4&0\\ 0&2&\mathbf{6}&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{ccccc|} 0&0&0&0&1\\ 0&0&3&\mathbf{4}&0\\ 0&5&0&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{ccccc|} 0&0&0&2&1\\ 0&0&5&0&0\\ 0&5&0&0&0\\ \mathbf{2}&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{cccccc|} 0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&5&0&0\\ 0&1&\mathbf{5}&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline \end{array} \\
&= \begin{array}{cccccc|} 0&0&0&0&2&1\\ 0&0&2&\mathbf{5}&0&0\\ 0&3&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{cccccc|} 0&0&0&2&\mathbf{2}&1\\ 0&0&4&1&0&0\\ 0&3&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{cccccc|} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&3&0&1\\ 0&0&4&1&0&0\\ 0&\mathbf{3}&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
= \begin{array}{cccccc|} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&3&0&1\\ 0&1&\mathbf{4}&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

[1] 0^0 は一般的に定義されていないが、ここでは $0^0 = 1$ として差し支えない

$$
= \begin{array}{cccccc|}
0&0&0&0&1&0\\
0&0&2&\mathbf{3}&0&1\\
0&3&0&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\ \hline
\end{array}
= \begin{array}{cccccc|}
0&0&0&1&1&0\\
0&0&3&1&0&1\\
0&\mathbf{3}&0&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\ \hline
\end{array}
= \begin{array}{cccccc|}
0&0&0&1&1&0\\
0&1&\mathbf{3}&1&0&1\\
1&1&0&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\ \hline
\end{array}
= \begin{array}{cccccc|}
0&0&1&1&1&0\\
0&\mathbf{2}&1&1&0&1\\
1&1&0&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{cccccc|}
0&1&1&1&1&0\\
1&0&1&1&0&1\\
1&1&0&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\ \hline
\end{array}
$$

また、以上の性質より、 2^n の平面的 2 進数表現について次のようなことがいえる。

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= 0 \quad (\mathit{if} \quad i+j<n) && (3.12)\\
a_{ij} &= \binom{n}{i} \bmod 2 \quad (\mathit{if} \quad i+j=n) && (3.13)
\end{aligned}
$$

3.6 基数と表現の一意性

第 3.4 節では、 p, q に具体的な数値を代入することについて触れた。しかしながら、そのような基数の定め方をすると、第 2.1 節で未定義としていた表現についても自然数を表現できるようになり、平面的 2 進数は表現の一意性を失うことになる。例えば自然数 $5 = \begin{array}{ccc|} 0&1&1\\ 1&0&0\\ 1&0&1\\ \hline \end{array}$ について、 $p=q=1$ のときは $\begin{array}{ccc|} 1&1&1\\ 1&1&0\\ \hline \end{array}$ や $\begin{array}{ccccc|} 1&1&1&1&1\\ \hline \end{array}$ なども同じく 5 をあらわし、 $p=2, q=0$ のときは $\begin{array}{ccc|} 1&0&1\\ \hline \end{array}$ や $\begin{array}{ccc|} 1&1&1\\ 1&0&1\\ \hline \end{array}$ などについて同じことがいえる。

一般に、 $p=1+k, q=1-k$ とおいたとき、

$$
pq = (1+k)(1-k) = 1-k^2
$$

より、 k^2 が自然数になるような k について、 $k^2 + \begin{array}{cc|} 1&0\\ 0&0\\ \hline \end{array}$ が 1 と同値になるなど、複素数上の多くの数 k について表現の一意性が無いことが容易に示される。

第 4 章　平面的 2 進数の拡張

本章では、これまで自然数においてのみ定義していた平面的 2 進数についての拡張概念を得ることを考える。

4.1　整数への拡張

平面的 2 進数によって自然数より大きい集合を表そうとしたとき、最も簡単に思いつくことの一つは、負の数への拡張であろう。単に負号を用いて拡張することも考えられるが、以下のように無限長の行列として再定義すれば p-進数 [7] のように負の数を考えることができる。[6]

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}p^i q^j \ \ (a_{ij} \in \{0,1\}) \tag{4.1}$$

ここで、等比級数の和の公式のような以下の 2 つの等式を認めるとする。

$$p + p^2 + p^3 + \ldots = \frac{p}{1-p} \tag{4.2}$$

$$q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{q}{1-q} \tag{4.3}$$

これを用いると、以下の等式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} + 1 &= \frac{p(1-q)+q(1-p)}{(1-p)(1-q)} + 1 \\ &= \frac{p+q-2pq}{1-p+q+pq} + 1 \\ &= \frac{2-2pq}{1-2+pq} + 1 = -2+1 \\ &= -1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

このことから、-1 の平面的 2 進数表現は次のように示せることがわかる。

$$-1 = \left.\begin{array}{ccccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\right|$$

なお、この配列は第 2.2 節で示した方法によって同じく求められる。ただしこのとき、係数が負になる場合においても式 (2.3) を適用する必要がある。以下に、 -5 の平面的 2 進数表記の導出過程を示す。ここで、負の奇数について $\left\lfloor \frac{-5}{2} \right\rfloor = -3$ 、 $-5 \bmod 2 = 1$ のようになることに注意する。

$$
-\mathbf{5}\;\begin{array}[b]{r|} \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rr|} 0 & -3 \\ -\mathbf{3} & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrr|} 0 & -2 & -\mathbf{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrr|} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -\mathbf{2} & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrrr|} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\mathbf{4} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrrr|} 0 & 0 & -2 & -\mathbf{2} \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \begin{array}[b]{rrrr|} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -\mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrrrr|} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -\mathbf{3} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrrrr|} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -\mathbf{3} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{rrrrr|} 0 & 0 & 0 & -2 & -\mathbf{1} \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \begin{array}[b]{rrrrr|} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -\mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
= \cdots = \begin{array}[b]{ccccccc|} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

4.2 平面的 2-進数

有理数の集合を p-進距離によって完備化した集合の元である p-**進整数**は、

$$
-\frac{1}{3} = \ldots 01010101 = \dot{0}\dot{1}
$$

のように加算無限桁の整数として表現される有理数である。p-進整数について第 2.2 節に似た変換を行うことによって、平面的 2 進数は（平面的 2-進数として）有理数の一部への拡張が考えられる。以下に、 $-\frac{1}{3}$ の平面的 2 進表記の導出過程を示す。また、これを下位 128 ビット分示したのが図 4.1 である。

$$
-\frac{1}{3} = \begin{array}[b]{c|} \mathbf{\dot{0}\dot{1}} \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{cc|} 0 & \dot{1}\dot{0} \\ \mathbf{\dot{1}\dot{0}} & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{ccc|} 0 & \dot{0}\dot{1} & \mathbf{\dot{1}\dot{0}} \\ \dot{0}\dot{1} & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{ccc|} 0 & 0 & \dot{0}\dot{1} \\ 0 & \dot{1}\dot{0} & 0 \\ \mathbf{\dot{0}\dot{1}} & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{cccc|} 0 & 0 & 0 & \dot{0}\dot{1} \\ 0 & \dot{1}\dot{0} & \mathbf{\dot{1}\dot{0}} & 0 \\ \dot{1}\dot{0} & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{cccc|} 0 & 0 & \dot{0}\dot{1} & \mathbf{\dot{0}\dot{1}} \\ 0 & \dot{1} & 0 & 0 \\ \dot{1}\dot{0} & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \begin{array}[b]{cccc|} 0 & 0 & 0 & \dot{1}\dot{0} \\ 0 & 0 & \dot{1} & 1 \\ 0 & \dot{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{\dot{1}\dot{0}} & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{1}\dot{0} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{1} & 1 \\ 0 & \dot{0}\dot{1} & \mathbf{\dot{1}} & 0 & 0 \\ \dot{0}\dot{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{1}\dot{0} \\ 0 & 0 & \dot{1} & \mathbf{\dot{1}} & 1 \\ 0 & \dot{1}\dot{0}0 & 1 & 0 & 0 \\ \dot{0}\dot{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \begin{array}[b]{ccccc|} 0 & 0 & 0 & \dot{1} & \mathbf{\dot{1}\dot{0}} \\ 0 & 0 & \dot{1}0 & 1 & 1 \\ 0 & \dot{1}\dot{0}0 & 1 & 0 & 0 \\ \dot{0}\dot{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \begin{array}[b]{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{0}\dot{1} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{1}\dot{0}0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{1}0 & 1 & 1 \\ 0 & \dot{1}\dot{0}0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{\dot{0}\dot{1}} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
= \cdots
$$

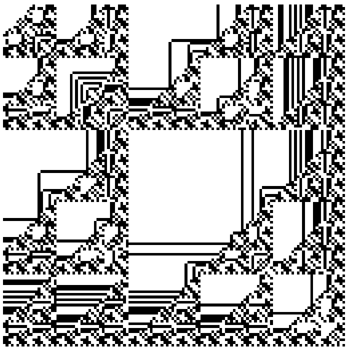


図 4.1: $-\frac{1}{3}$ の平面的 2-進数表記（原点右下、次数 128 以上切り捨て）

4.3　関数の表現

基数 p, q を、 x を変数とする関数、たとえば $p = x, q = 2 - x$ とおけば、平面的 2 進数は少なくとも係数が自然数であるような多項式を表現することができる。具体的に、多項式 $x^2 + 2x + 3$ は以下のように平面的 2 進数表現が求められる。

$$x^2 + 2x + 3 = p^2 + 2p + 3 = \begin{array}{ccc|} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccc|} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccc|} 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{cccc|} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

この基数の定め方の場合、係数が負となる項を含む多項式の一部も表現できる（最も単純な例で $\begin{array}{c|} 1 \\ 0 \\ \hline \end{array} = -x + 2$ ）が、第 4.1 節で示される再定義の上でこのように基数を定めることにより、係数が整数であるようなすべての多項式を表現できるようになる。

第5章　まとめ

今回提案した平面的2進数は、数学的に興味深い性質を数多く持っていることがわかった。

本研究では演算器への応用など実用的な発見までは至らなかったが、第4章で述べた拡張を踏まえるなどして平面的2進数をさらに体系化することによって、数や演算に対して新たな見方が得られる可能性がある。

数値解析の新たな手法や回路への応用を見据えつつ、今後さらに理論的な考察を踏まえていくことに意義があると結論付けられる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である秋田純一講師および北川章夫助教授に深く感謝いたします。

大学生活を通して金沢大学工学部情報システム工学科の先生方にはたいへんお世話になりました。特に離散力学系研究室の伊藤俊次教授、榎本文彦助手には本研究に関して多くのご指導をいただき、大変感謝しています。

本研究に限らず、数学に関する数多くの知恵やアイデアを交換した田中諒くんにも心から感謝しています。

研究室の先輩としてさまざまなご指導、ご協力を頂いた高田雅史氏、新村達氏、高木宏章氏、谷越大峰氏、中野伸吾氏、早瀬佳氏、村上知倫氏、金子康隆氏、塩入徳亮氏、牧野良成氏、矢尾真理子氏、米田智弘氏に深く感謝いたします。

互いに励ましあい、研究生活を豊かなものにして頂いた狩野孝太氏、岸田亮氏、丁子浩明氏、堂前圭祐氏、名倉満氏、野手翔太氏、藤枝茂氏に感謝します。

ソーシャルネットワーキングサービス mixi[1]を通し、日々の生活を暖かく応援してくれたマイミクシィの皆様に深く感謝いたします。

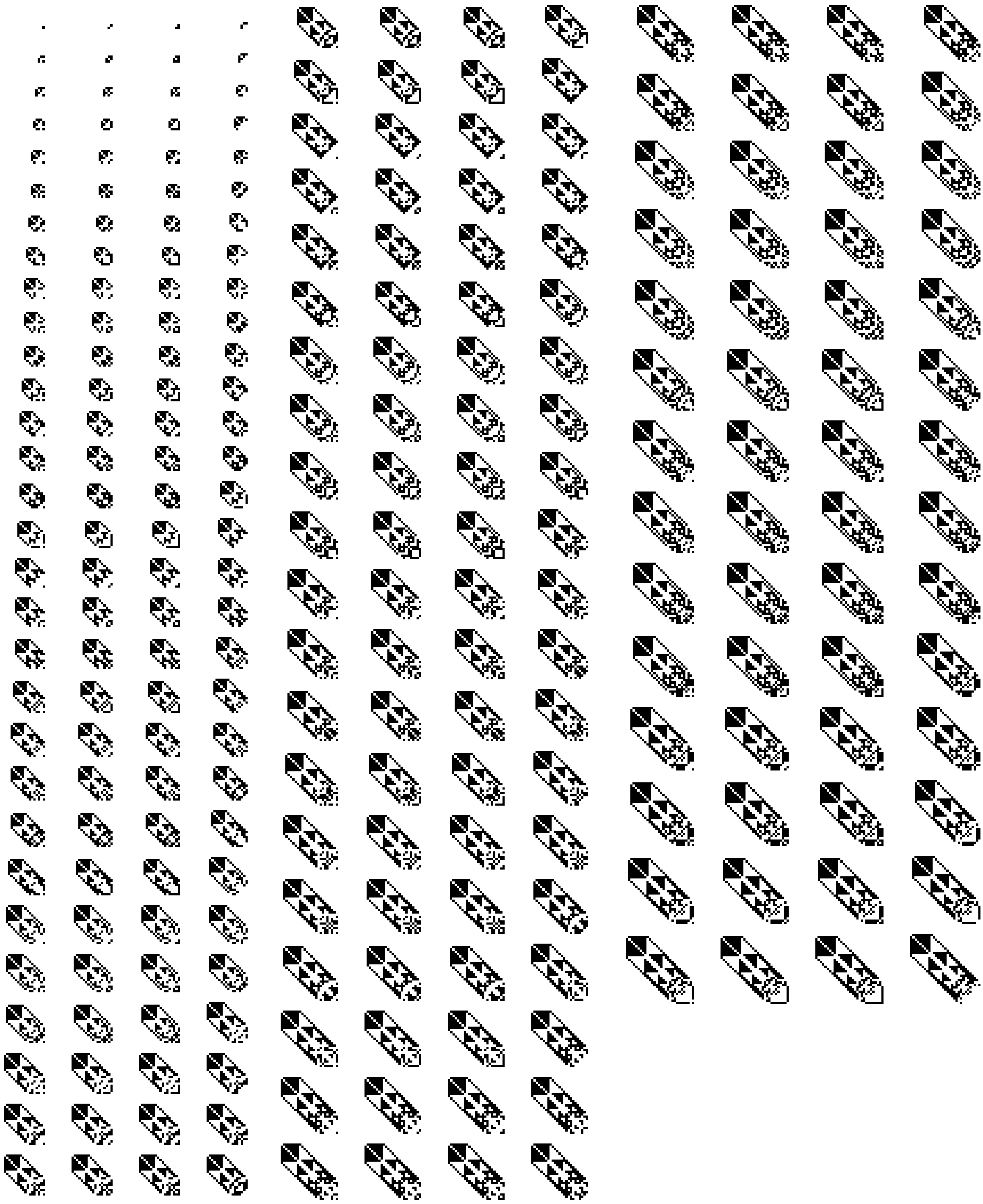
最後に、度重なる学費の負担にもかかわらず進学を支持して頂き、生活を支えてくれる両親、そして日頃から応援してくれる姉に厚く御礼申し上げます。

[1]http://mixi.jp/

付 録A　平面的2進数一覧

次頁に 1 から 256 までの平面的 2 進数のパターン一覧を示す。ただし便宜上、1 を黒、0 を白として表現している。

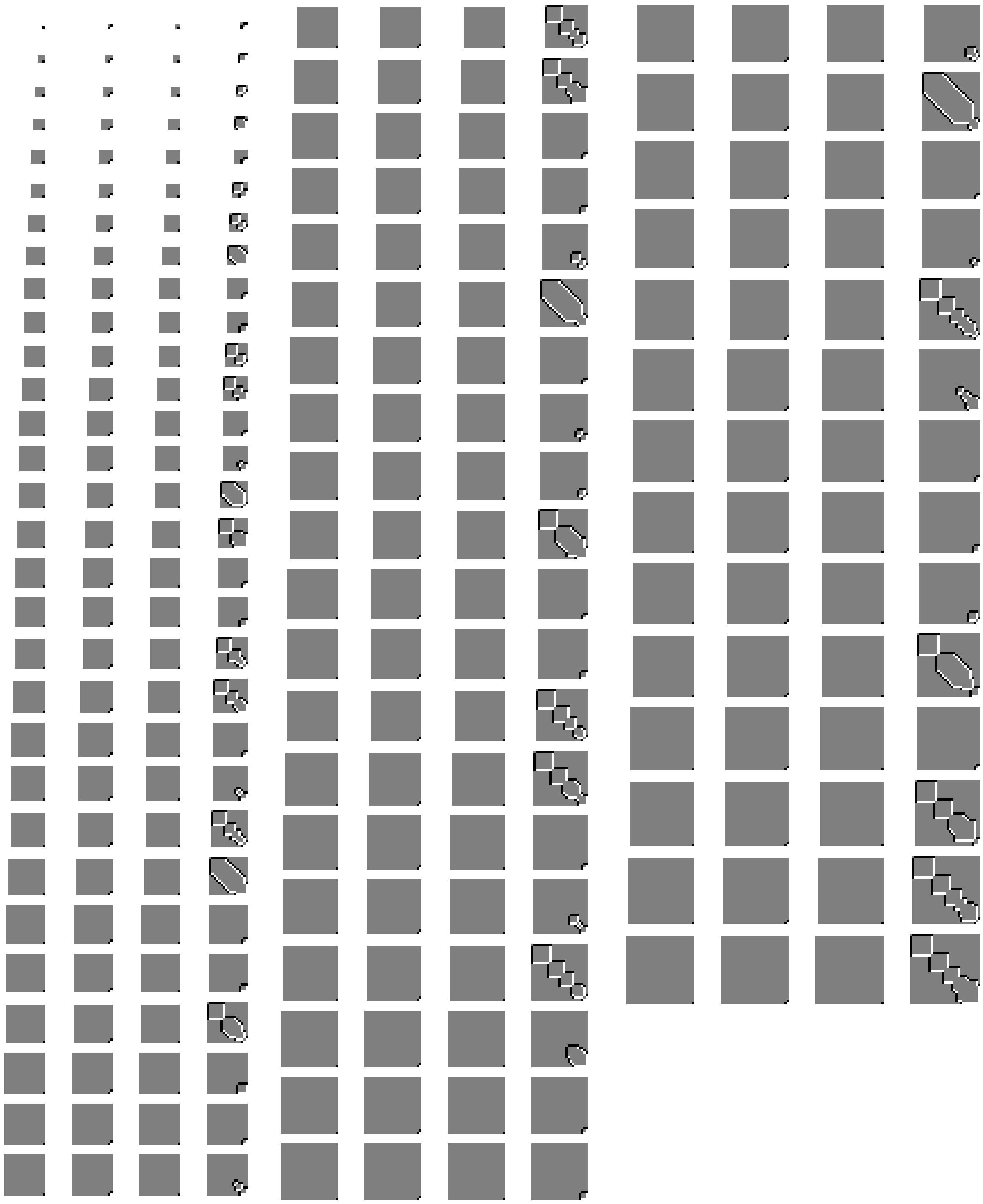
1〜120 121〜200 201〜256



付 録B　平面的2進数差分一覧

次頁に 1 から 256 までの平面的 2 進数について、 A の $A-1$ に対する各ビットの変化の一覧を示す。ただし、変化のないビットを灰色、0 から 1 に変化したビットを黒、1 から 0 に変化したビットを白として表現している。

1〜120　　121〜200　　201〜256



参考文献

[1] *Fibonacci coding* - Wikipedia,
http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_coding

[2] D. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 2*, 1973

[3] 位取り記数法 - Wikipedia,
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BD%8D%E5%8F%96%E3%82%8A%E8%A8%98%E6%95%B0%E6%B3%95

[4] *Golden ratio base* - Wikipedia,
http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio_base

[5] *Factoradic* - Wikipedia,
http://en.wikipedia.org/wiki/Factoradic

[6] *0.999...* - Wikipedia,
http://ja.wikipedia.org/wiki/0.999...

[7] *p-adic number* - Wikipedia,
http://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_number